Examen parcial de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas
27 de mayo de 1998

1. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a,b) = [a,\, b,\, b+\pi i,\, a+\pi i,\, a]$ $(a < 0 < b)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{\alpha x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \frac{\pi^2}{4} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$.

2. Pruébese que todos los ceros del polinomio

$$P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6$$

pertenecen al anillo $A(0;1,2)$ y determÝnese cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.

3. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 1\}$$

sobre el disco unidad.

4. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones holomorfas en $D(0,1)$ verificando que:

a) $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D(0,1)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$;

b) El conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$está acotado.

Pruébese que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$.